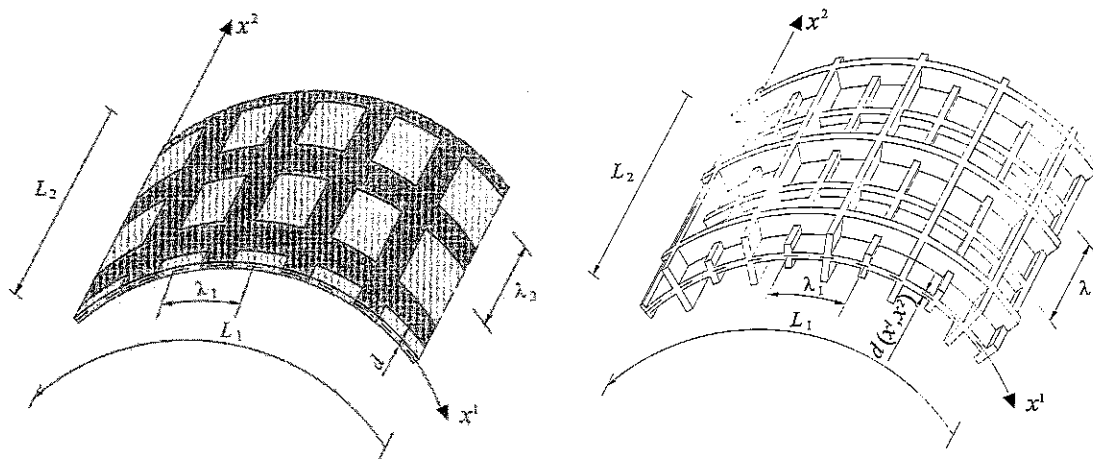


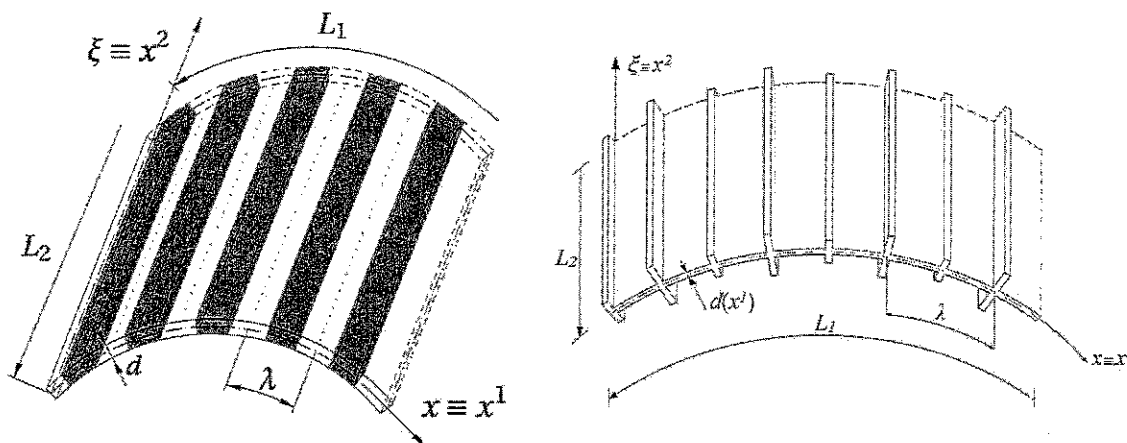
STRESZCZENIE

Dynamika cienkich mikro-niejednorodnych powłok walcowych w ujęciu rozszerzonej wersji modelowania tolerancyjnego

Obiektami rozważań są cienkie, liniowo-sprężyste, kołowe powłoki walcowe typu Kirchhoffa-Love'a, mające periodycznie mikroniejednorodną strukturę w jednym lub dwóch kierunkach stycznych do powierzchni środkowej powłoki. Powłoki takie nazywamy kolejno *uniperiodycznymi* i *biperiodycznymi*. Przez strukturę periodyczną rozumiemy periodycznie zmienną grubość i/lub periodycznie zmiennie własności sprężyste oraz inercyjne. *Zakłada się, że charakterystyczny wymiar liniowy komórki periodyczności jest dostatecznie duży w porównaniu z maksymalną grubością powłoki oraz dostatecznie mały w porównaniu z minimalnym promieniem krzywizny oraz najmniejszym charakterystycznym wymiarem liniowym powierzchni środkowej.* Oznacza to, że analizowane powłoki składają się z dużej liczby identycznych elementów, idealnie ze sobą połączonych, i każdy element zwany komórką traktowany jest jak cienka powłoka. Klasycznymi przykładami są powłoki walcowe wykonane z dwóch materiałów lub wzmocnione żebrami; materiały i żebra są periodycznie i gęsto rozmieszczone w kierunkach osiowym i obwodowym lub tylko w jednym z tych kierunków, por. rysunki pokazane poniżej.



Przykłady powłok biperiodycznych



Przykłady powłok uniperiodycznych

Tematem rozprawy doktorskiej jest analityczne modelowanie zagadnień dynamiki walcowych powłok mikro-periodycznych i badanie wpływu wielkości komórki (tj. charakterystycznego wymiaru liniowego komórki) na makroskopowe i mikroskopowe zachowania rozpatrywanych powłok. Wpływ ten nazywany jest *efektem skali*.

Opis dynamicznych zachowań periodycznie mikro-niejednorodnych powłok będących przedmiotem rozprawy, w ramach znanej teorii Kirchhoffa-Love'a, prowadzi do równań, których współczynniki są periodycznymi, silnie oscylującymi i nieciągłymi funkcjami współrzędnych odniesionych do kierunków periodyczności. Stąd, równania te nie mogą być wprost zastosowane do analizy zagadnień inżynierskich. Formułowane są zatem różne przybliżone metody modelowania (tj. procedury uśredniające) prowadzące od równań różniczkowych cząstkowych z silnie oscylującymi współczynnikami do równań o współczynnikach stałych.

Modele uśrednione powłok (płyt) periodycznych są najczęściej otrzymywane na drodze *homogenizacji asymptotycznej*. Jednakże, modele te pomijają efekt skali. Efekt ten jest uwzględniony w równaniach modeli sformułowanych na drodze tzw. *homogenizacji wyższego rzędu*. Jednakże ze względu na duże trudności natury obliczeniowej, modele te nie są stosowane do rozwiązywania zagadnień inżynierskich.

Alternatywne, nieasymptotyczne podejście do matematycznego modelowania ciał mikro-niejednorodnych, oparte na *pojęciu tolerancji* (pojęcie związane z dokładnością prowadzonych pomiarów lub obliczeń) i prowadzące do uśrednionych równań o stałych lub ciągłych i wolnozmiennych współczynnikach zależnych od wielkości komórki, zostało zaproponowane i rozwijane przez profesora Cz. Woźniaka w wielu publikacjach, np. [Woźniak Cz. (red.): *Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010]. *Relacje tolerancyjne determinowane parametrami tolerancji, funkcje wolno-zmienne, funkcje tolerancyjnie-periodyczne, fluktuacyjne funkcje kształtu oraz operacja uśredniania są podstawowymi pojęciami techniki tolerancyjnego modelowania*. Technika ta oparta jest na dwóch założeniach. Pierwsze z tych

założeń, zwane *przybliżeniem (uśrednieniem) tolerancyjnym*, umożliwia pomijanie wyrazów rzędu parametrów tolerancji. Drugie założenie zwane jest *mikro-makro dekompozycją* pól przemieszczeń (lub pola temperatury w zagadnieniach przepływu ciepła). Ograniczając się do zagadnień mechanicznych, zgodnie z tym założeniem *nieznane przemieszczenia* w równaniach wyjściowych są przedstawione w postaci sumy *nieznanych uśrednionych na komórce przemieszczeń*, będących *funkcjami wolnozmiennymi* (tzn. przyjmującymi w ramach tolerancji stałe wartości na komórce) *w kierunkach periodyczności*, oraz *silnie oscylujących fluktuacji*. Fluktuacje są opisane *przez znane w każdym analizowanym zagadnieniu liniowo-niezależne, periodyczne lub tolerancyjnie-periodyczne fluktuacyjne funkcje kształtu pomnożone przez nieznane wolnozmiennne funkcje, zwane amplitudami fluktuacji*.

Pewna rozszerzona wersja techniki tolerancyjnego modelowania została zaproponowana przez B. Tomczyk i Cz. Woźniaka w monografii [Tomczyk B., Woźniak Cz.: *Tolerance models in elastodynamics of certain reinforced thin-walled structures*. W: Kołakowski Z., Kowal-Michalska K. (red.) *Statics, Dynamics and Stability of Structural Elements and Systems*, vol. 2, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 123-153, 2012]. Wersja ta oparta jest na nowym pojęciu *funkcji słabo wolnozmiennnej*, które jest pewnym rozszerzeniem znanego pojęcia *funkcji wolnozmiennnej*. Obie te funkcje w ramach tolerancji mogą być traktowane jako stałe na komórce. Podstawowa różnica między tymi funkcjami polega na tym, że *iloczynny pochodnych funkcji słabo wolnozmiennnej w kierunkach periodyczności i parametru długości mikrostruktury* (tj. charakterystycznego wymiaru liniowego komórki periodyczności) *nie mogą być traktowane jako pomijalnie małe*. Oznacza to, że pojęcie funkcji słabo wolnozmiennnej jest mniej restrykcyjne niż pojęcie funkcji wolnozmiennnej. *Uśrednione modele matematyczne wyprowadzone z zastosowaniem funkcji słabo wolnozmiennnej, zwane ogólnymi lub rozszerzonymi, zawierają większą liczbę składników zależnych od wielkości komórki niż modele standardowe sformułowane w oparciu o klasyczne, bardziej restrykcyjne pojęcie funkcji wolnozmiennnej*. Tym samym modele ogólne umożliwiają bardziej szczegółowe badanie zjawisk zależnych od wielkości komórki niż modele standardowe. Inne podstawowe pojęcia rozszerzonej techniki tolerancyjnego modelowania takie jak parametry tolerancji, operacja uśredniania, funkcje tolerancyjnie-periodyczne, fluktuacyjne funkcje kształtu są takie same jak w klasycznej procedurze tolerancyjnego modelowania. Podobnie jak standardowe modelowanie tolerancyjne, rozszerzone modelowanie tolerancyjne oparte jest na dwóch założeniach: przybliżeniu tolerancyjnym i mikro-makro dekompozycji pól przemieszczeń, przy czym założenia te odniesione są teraz do *funkcji słabo wolnozmiennnych*.

W rozprawie doktorskiej sformułowano nowe, matematyczne, uśrednione modele służące do analizy zagadnień dynamiki rozważanych biperiodycznych i uniperiodycznych powłok walcowych. Do wyprowadzenia modeli wykorzystano rozszerzoną wersję techniki tolerancyjnego modelowania. Wykorzystano także nowe podejście do asymptotycznego uśredniania równań różniczkowych cząstkowych (lub funkcjonałów całkowych) o silnie

oscylujących periodycznych lub tolerancyjnie periodycznych współczynnikach zaproponowane przez Cz. Woźniaka w monografii [Woźniak Cz. (red.): *Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010]. Podejście to nazwano asymptotycznym konsystentnym. W rozprawie doktorskiej wykorzystano również, zaprezentowaną w wyżej wymienionej monografii, **połączoną asymptotyczno-tolerancyjną technikę modelowania ciał mikro-niejednorodnych**, przy czym klasyczne modelowanie tolerancyjne oparte na pojęciu funkcji wolnozmiennnej zastąpiono modelowaniem tolerancyjnym rozszerzonym opartym na pojęciu funkcji słabo wolnozmiennnej. Stosując technikę modelowania tolerancyjnego rozszerzonego oraz technikę modelowania asymptotyczno-tolerancyjnego rozszerzonego, a także procedurę modelowania asymptotycznego konsystentnego do wyjściowych równań Eulera-Lagrange'a, których jawna postać pokrywa się ze znanymi równaniami teorii Kirchhoffa-Love'a cienkich powłok liniowo-sprężystych, **wyprowadzono matematyczne, uśrednione modele do analizy dynamiki rozważanych biperiodycznych i uniperiodycznych powłok walcowych: nowe rozszerzone (ogólne) modele tolerancyjne, modele asymptotyczne konsystentne oraz nowe rozszerzone (ogólne) modele asymptotyczno-tolerancyjne**. W przeciwieństwie do silnie oscylujących i nieciągłych współczynników równań wyjściowych, współczynniki równań uśrednionych są stałe. Ponadto, współczynniki równań rozszerzonych modeli tolerancyjnych i asymptotyczno-tolerancyjnych zależą od długości okresu periodyczności struktury. Oznacza to, że sformułowane modele rozszerzone uwzględniają wpływ wielkości mikrostruktury na dynamiczne zachowania powłok. Wyprowadzone w rozprawie doktorskiej ogólne modele tolerancyjne oraz ogólne modele asymptotyczno-tolerancyjne są rozszerzeniami znanych standardowych modeli tolerancyjnych oraz standardowych modeli asymptotyczno-tolerancyjnych periodycznych powłok walcowych prezentowanymi w monografii [Tomczyk B.: *Length-scale effect in dynamics and stability of thin periodic cylindrical shells*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Nr 1166, seria: Rozprawy Naukowe, 466, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2013]. W rozprawie przeprowadzono szczegółową analizę dotyczącą podobieństw i różnic między nowymi rozszerzonymi i znanymi standardowymi modelami.

Komentarze i wnioski dotyczące sformułowanych modeli matematycznych są następujące:

- **Stosując rozszerzoną wersję modelowania tolerancyjnego, wyprowadzono dwa nowe rozszerzone (ogólne) modele tolerancyjne służące do analizy zagadnień dynamiki rozważanych biperiodycznych i uniperiodycznych powłok**. Procedura modelowania tolerancyjnego rozszerzonego realizowana była w dwóch etapach. Pierwszy etap polegał na **tolerancyjnym uśrednieniu funkcji Lagrange'a** opisującej dynamiczne zachowania cienkich liniowo-sprężystych powłok walcowych w ramach znanej teorii Kirchhoffa-Love'a. Po wprowadzeniu **mikro-makro dekompozycji** do wyjściowego lagrangianu, uśredniono otrzymany

wynik stosując *operator uśredniania* oraz wykorzystując *przybliżenia tolerancyjne* wynikające bezpośrednio z definicji *funkcji słabo wolnozmiennej i fluktuacyjnej funkcji kształtu*. W drugim etapie, *stosując zasadę stacjonarności działania do funkcjonalu działania zdefiniowanego poprzez tolerancyjnie uśrednioną funkcję Lagrange'a, otrzymano równania modeli tolerancyjnych rozszerzonych dla rozważanych periodycznych powłok*. Otrzymane równania Eulera-Lagrange'a przedstawiono także w ich jawnej postaci, tj. w postaci relacji konstytutywnych oraz równań równowagi dynamicznej. Niewiadomymi tych równań są *uśrednione przemieszczenia (makroprzemieszczenia) i amplitudy fluktuacji*. *Niewiadome muszą być funkcjami słabo wolnozmiennymi w odniesieniu do komórki i parametrów tolerancji*. Te wymagania są wykorzystane do oceny *a posteriori* parametrów tolerancji, czyli także do sprawdzenia fizycznej poprawności wyników otrzymanych w ramach rozszerzonych modeli tolerancyjnych. Żądania te determinują zakres stosowalności zaproponowanych ogólnych modeli tolerancyjnych. *Współczynniki równań modeli tolerancyjnych rozszerzonych są stałe i na ogół zależne od wielkości mikrostruktury*. Efekt skali może być analizowany nie tylko w dynamicznych, ale także w stacjonarnych zagadnieniach. Wyprowadzone w rozprawie *modele tolerancyjne rozszerzone* powłok biperiodycznych i uniperiodycznych *zawierają więcej wyrazów zależnych od wielkości komórki niż korespondujące modele tolerancyjne standardowe* sformułowane w [Tomczyk B.: *Length-scale effect in dynamics and stability of thin periodic cylindrical shells*. Zesz. Nauk. Politechniki Łódzkiej, Nr 1166, seria: Rozprawy Naukowe, 466, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2013]. *Zasadnicze różnice są między modelem tolerancyjnym rozszerzonym i modelem tolerancyjnym standardowym powłok biperiodycznych*. W modelu ogólnym powłoki biperiodycznej, równania dla niewiadomych amplitud fluktuacji zawierają pochodne przestrzenne i pochodne czasowe tych funkcji. W modelu standardowym powłoki biperiodycznej, równania dla niewiadomych amplitud fluktuacji zawierają tylko pochodne czasowe tych funkcji (amplitudy fluktuacji są tu zmiennymi wewnętrznymi). *Oznacza to, że model tolerancyjny standardowy powłok biperiodycznych, w przeciwieństwie do modelu ogólnego, nie opisuje wielu istotnych zjawisk spowodowanych mikro-periodyczną strukturą tych powłok*: nie może być na przykład stosowany do badania tzw. efektów warstwy brzegowej, gdzie termin "brzeg" odnosi się do przestrzeni, badania wykładniczych postaci drgań, analizy zagadnień propagacji fal przemieszczeniowych z uwzględnieniem zjawiska dyspersji.

- *Stosując technikę modelowania asymptotycznego konsystentnego, wyprowadzono dwa modele asymptotyczne konsystentne służące do analizy zagadnień dynamiki biperiodycznych i uniperiodycznych powłok będących przedmiotem rozważań pracy doktorskiej*. Procedura *asymptotycznego konsystentnego uśredniania* równań różniczkowych cząstkowych (lub funkcjonalów całkowych) o silnie oscylujących periodycznych lub tolerancyjnie-periodycznych współczynnikach nie zawiera pojęć funkcji tolerancyjnie-periodycznej i funkcji słabo wolnozmiennej lub wolnozmiennej. Wprowadzono tu tylko pojęcia fluktuacyjnej funkcji

kształtu i operacji uśredniania. W zagadnieniach mechanicznych, podstawowym kinematycznym założeniem tego podejścia jest *asymptotyczna dekompozycja pól przemieszczeń*. Zgodnie z tym założeniem, przemieszczenia występujące w wyjściowych równaniach (lub w wyjściowym funkcjale całkowym) zastąpione są rodzinami pól przemieszczeń zdefiniowanymi na komórce i zależnymi od parametru $\varepsilon \in (0, 1]$. Rodziny te rozłożone są na *nieznane przemieszczenia* (zwane tak jak w podejściu tolerancyjnym *makroprzemieszczeniami*), *niezależne od parametru ε oraz silnie oscylujące fluktuacje przemieszczeń zależne od ε* . Te silnie oscylujące fluktuacje są reprezentowane przez *znane periodyczne fluktuacyjne funkcje kształtu zależne od ε* oraz przez *nieznane funkcje niezależne od ε* , które, tak jak w podejściu tolerancyjnym, zwane są *amplitudami fluktuacji*. Żąda się, aby występujące w asymptotycznej dekompozycji funkcje niezależne od ε były ciągłe i ograniczone w kierunkach periodyczności wraz z ich odpowiednimi pochodnymi. Niezależność wyżej wymienionych funkcji od parametru ε stanowi zasadniczą różnicę między podejściem asymptotycznym konsyistentnym a podejściem stosowanym w znanych teoriach homogenizacji asymptotycznej. Ponadto, modele asymptotyczne konsyistentne, w przeciwieństwie do powszechnie stosowanych modeli asymptotycznych, nie wymagają rozwiązywania skomplikowanych analitycznie brzegowych zagadnień na komórce w celu wyznaczenia efektywnych sztywności ciała. W podejściu asymptotycznym konsyistentnym, moduły efektywne są rozwiązaniem układu równań algebraicznych liniowych dla nieznanych *amplitud fluktuacji*.

Procedura modelowania asymptotycznego konsyistentnego zastosowana do wyjściowych równań Eulera-Lagrange'a realizowana była w dwóch etapach. Pierwszy etap polegał na *asymptotycznym konsyistentnym uśrednieniu funkcji Lagrange'a* z wykorzystaniem asymptotycznej dekompozycji. W drugim etapie, stosując *zasadę stacjonarności działania do uśrednionego funkcjalu działania* zdefiniowanego poprzez *asymptotycznie uśredniony lagrangian*, otrzymano uśrednione równania Eulera-Lagrange'a oraz ich jawną postać. Po wyeliminowaniu z układu równań nieznanych amplitud fluktuacji, otrzymano równania wyrażone tylko w makroprzemieszczeniach. *Współczynniki równań modeli asymptotycznych są stałe i nie zależą od parametru długości mikrostruktury.*

• *Stosując rozszerzoną wersję łączonego modelowania asymptotyczno-tolerancyjnego, wyprowadzono dwa nowe rozszerzone (ogólne) modele asymptotyczno-tolerancyjne służące do analizy zagadnień dynamiki rozważanych biperiodycznych i uniperiodycznych powłok.* Modele łączone składają się z modeli makroskopowych (asymptotycznych) sformułowanych przy zastosowaniu modelowania asymptotycznego konsyistentnego oraz modeli mikroskopowych (tolerancyjnych) wyprowadzonych przy zastosowaniu rozszerzonej wersji procedury modelowania tolerancyjnego. Modele makroskopowe i mikroskopowe połączone są ze sobą na podstawie założenia, że rozwiązania danego zagadnienia brzegowo-początkowego w ramach modeli asymptotycznych są znane. Równania ogólnych modeli asymptotyczno-

tolerancyjnych mają stałe współczynniki. Ponadto, współczynniki modeli mikroskopowych na ogół zależą od wielkości komórki. Tym samym ogólne modele łączone mogą być stosowane do analizy efektu skali. Niewiadome amplitudy fluktuacji modeli mikroskopowych muszą być funkcjami *slabo wolnozmiennymi*. To żądanie może być sprawdzone tylko *a posteriori*. W rozprawie pokazano, że przy pewnych warunkach nałożonych na fluktuacyjne funkcje kształtu, otrzymuje się równania modeli mikroskopowych niezależne od rozwiązań w ramach modeli asymptotycznych. *Równania te opisują mikrodynamiczne zachowania rozważanych w rozprawie powłok niezależnie od ich makrodynamicznych zachowań.* Jest to główna zaleta wyprowadzonych ogólnych modeli asymptotyczno-tolerancyjnych. Wyprowadzone w rozprawie *rozszerzone modele asymptotyczno-tolerancyjne* powłok biperiodycznych i uniperiodycznych *zawierają więcej wyrazów zależnych od wielkości komórki niż korespondujące standardowe modele asymptotyczno-tolerancyjne* sformułowane w [Tomczyk B.: *Length-scale effect in dynamics and stability of thin periodic cylindrical shells*. Zesz. Nauk. Politechniki Łódzkiej, Nr 1166, seria: Rozprawy Naukowe, 466, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2013]. *Zasadnicze różnice są między rozszerzonym modelem mikroskopowym i standardowym modelem mikroskopowym powłok biperiodycznych.* W modelu mikroskopowym ogólnym powłok biperiodycznych, równania różniczkowe cząstkowe dla niewiadomych *slabo wolnozmiennych* amplitud fluktuacji zawierają pochodne przestrzenne i pochodne czasowe tych funkcji. W modelu mikroskopowym standardowym powłok biperiodycznych, równania różniczkowe zwyczajne dla niewiadomych *wolnozmiennych* amplitud fluktuacji zawierają tylko pochodne czasowe tych funkcji. *Oznacza to, że standardowe równania mikroskopowe dla powłok biperiodycznych, w przeciwieństwie do rozszerzonych równań mikroskopowych, nie opisują wielu istotnych zagadnień mikro-dynamiki.*

Rozwiązania zagadnień brzegowo-początkowych otrzymywane w ramach wyprowadzonych w rozprawie modeli determinowane są postaciami *fluktuacyjnych funkcji kształtu*. Fluktuacyjne funkcje kształtu reprezentują od strony jakościowej oscylacje pól przemieszczeń powierzchni środkowej spowodowane periodyczną budową powłoki. W zagadnieniach dynamiki, funkcje te powinny opisywać główne postaci drgań własnych komórki lub fizycznie poprawną aproksymację tych postaci. Funkcje te mogą być otrzymane jako dokładne lub przybliżone rozwiązania zagadnień własnych na komórce, opisujących drgania własne komórki przy periodycznych warunkach brzegowych. Fluktuacyjne funkcje kształtu mogą być również traktowane jako funkcje kształtu otrzymane na drodze periodycznej dyskretyzacji komórki przy wykorzystaniu np. metody elementów skończonych. Wybór tych funkcji może być także oparty na doświadczeniu lub intuicji badacza odnośnie przewidywanych postaci drgań własnych komórki periodyczności.

Należy podkreślić, że zastosowane w rozprawie techniki modelowania zagadnień dynamiki powłok z mikrostrukturą wymagają *niezależnego* wyprowadzania równań dla powłok

biperiodycznych i uniperiodycznych. Powłoki uniperiodyczne nie są szczególnym przypadkiem powłok biperiodycznych.

Ogólne i standardowe modele tolerancyjne oraz modele asymptotyczne zastosowano do *oceny efektu skali* w pewnych szczególnych zagadnieniach dotyczących drgań własnych rozważanych powłok. *Analizując dynamikę powłok w ramach ogólnych i standardowych modeli tolerancyjnych, otrzymano wzory analityczne nie tylko na podstawowe tzw. niższe częstotliwości drgań własnych, ale również na nowe, dodatkowe, tzw. wyższe częstotliwości drgań własnych zależne od wielkości mikrostruktury. Wyższe częstotliwości umożliwiają analizę drgań wyższego rzędu oraz zjawiska dyspersji. Te nowe wyższe częstotliwości drgań nie mają swoich odpowiedników w analitycznych modelach asymptotycznych oraz w modelach numerycznych, opartych na przykład na metodzie elementów skończonych.* Wykazano, że różnice między wartościami *podstawowych niższych częstotliwości drgań własnych* otrzymanymi z modeli tolerancyjnych ogólnych i modeli tolerancyjnych standardowych są pomijalnie małe. Wykazano także, że różnice między wartościami *podstawowych niższych częstotliwości drgań własnych* otrzymanymi z modeli tolerancyjnych i modeli asymptotycznych są również pomijalnie małe. *Oznacza to, że wpływ wielkości komórki periodyczności na niższe częstotliwości drgań własnych rozważanych powłok może być pominięty z obliczeniowego punktu widzenia.* Drgania własne mikro-periodycznych powłok walcowych będących przedmiotem rozważań rozprawy doktorskiej mogą być analizowane w ramach modeli asymptotycznych, prostszych analitycznie od modeli z efektem skali.

Rozszerzone równania mikroskopowe (tolerancyjne) modeli łączonych asymptotyczno-tolerancyjnych, *niezależne od rozwiązań w ramach modeli asymptotycznych*, wykorzystano do analizy zagadnień szczególnych mikrodynamiki rozważanych periodycznych powłok walcowych:

- Pokazano, że zależne od wielkości komórki mikrodrżania można analizować *niezależnie* od makrodrżań, które od wielkości mikrostruktury nie zależą. Wyprowadzono wzory na *dodatkowe, zależne od wielkości mikrostruktury częstotliwości mikro-drżań własnych w kierunkach obwodowym, osiowym oraz normalnym do powierzchni środkowej.*
- *W powłokach biperiodycznych*, przy zadanych szczególnych warunkach brzegowych, *analizowano harmoniczne mikrodrżania w kierunku osiowym z częstotliwością $\tilde{\omega}$ (rozprężone z mikrodrżaniami w kierunkach obwodowym i normalnym).* Uzyskano *nowe wyniki w teorii mikrodrżań powłok biperiodycznych.* Pokazano, że w zależności od relacji między częstotliwością drżań harmonicznych $\tilde{\omega}$ a wyższą częstotliwością mikrodrżań własnych $\tilde{\omega}_*$, zależną od wielkości komórki, występują różne postaci mikrodrżań. *Mikrodrżania zanikają wykładniczo lub liniowo. Dla pewnych relacji między wartościami $\tilde{\omega}$ i $\tilde{\omega}_*$ mamy do czynienia z niezanikającą (tj. oscylującą) postacią mikrodrżań lub z mikrodrżaniami rezonansowymi. Zbadano także tzw. efekt warstwy brzegowej, gdzie termin „brzeg” odnosił się do przestrzeni. Należy*

podkreślić, że powyższe efekty nie mogą być analizowane przy zastosowaniu standardowych równań mikroskopowych dla powłok biperiodycznych, ponieważ równania te nie zawierają pochodnych przestrzennych amplitud fluktuacji.

• *W powłokach bi- i uniperiodycznych nieograniczonych w kierunku osiowym, badano zagadnienia propagacji fal długich. Badane fale odnosiły się tylko do fluktuacyjnych części przemieszczeń zależnych od efektu skali. Uzyskano nowe wyniki. Pokazano, że w zależności od ograniczeń nałożonych na prędkość propagacji fal mogą propagować się trzy typy fal: sinusoidalna lub wykładnicza lub występuje zdegenerowany przypadek rozgraniczający fale sinusoidalne i wykładnicze. Wyprowadzono relacje dyspersji. Wyprowadzono i zbadano nową prędkość propagacji fal zależną od wielkości mikrostruktury. Należy podkreślić, że powyższe efekty mogą być analizowane przy zastosowaniu standardowych równań mikroskopowych dla powłok uniperiodycznych, ale nie mogą być analizowane przy zastosowaniu standardowych równań mikroskopowych dla powłok biperiodycznych.*

Wszystkie przedstawione powyżej efekty, uzyskane w ramach równań mikromechaniki rozszerzonego modelu asymptotyczno-tolerancyjnego nie mogą być analizowane w ramach asymptotycznych modeli periodycznych powłok walcowych, jak również przy użyciu znanych, komercyjnych programów komputerowych opartych na metodzie elementów skończonych.

Wyprowadzone w niniejszej rozprawie modele periodycznie mikro-niejednorodnych powłok walcowych mogą być wykorzystane do badań dynamiki powłokowych elementów konstrukcyjnych mostów i dachów, powłokowych elementów reaktorów, powłokowych elementów samolotów, okrętów, maszyn.

Uzyskane wyniki mają istotny wpływ na stan wiedzy dotyczącej dynamicznych zachowań cienkościennych powłok walcowych o strukturze periodycznie mikro-niejednorodnej, a także generują nowe kierunki badań i tym samym wywierają wpływ na rozwój tej dziedziny wiedzy.

Dalsze badania mikro-periodycznych powłok walcowych, będących obiektem rozważań rozprawy doktorskiej, przy wykorzystaniu rozszerzonej wersji techniki tolerancyjnego modelowania, mogą dotyczyć nieliniowych zagadnień dynamiki, liniowych i nieliniowych zagadnień stateczności, problemów dynamicznej termosprężystości.

mgr inż. Anna Litwina

